4.6.3 Çözümlü Problemler

(1) L'Hospital kuralından faydalanarak aşağıdaki limitleri bulunuz.

(a)	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5-3x^2+7x-5}{x^4-5x+4}$;	(b)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\frac{2}{\pi}\text{arccosx})}{\ln(1+x)}$;
(c)	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-1}{\ln x}$;	(d)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{xarcsin(x^2)}{x\cos x-\sin x}$;
(e)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax-\sin bx}{\sinh ax-\sinh bx}$;	(f)	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^\alpha-1}{x^\beta-1}$ $(\beta\neq 0)$;
(g)	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\ln(x-\frac{\pi}{2})}{\tan x}$;	(h)	$\lim\limits_{x\to 0_+}\frac{\ln(1-\cos x)}{\ln\tan x}$;
(i)	$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{e^x-1})$;	(j)	$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x)$;
(k)	$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{x^x-1}$;	(l)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\{(\frac{\pi}{2}-arctanx)\}^{\frac{1}{x}}$;
(m)	$\lim\limits_{x\to 0_+}(\ln\cot x)^{\tan x}$;	(n)	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;
(o)	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$;	(p)	$\lim\limits_{x\to 0_+}\mid\ln x\mid^{2x}$;
(q)	$\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{x})^{\frac{1}{\sin\pi x}}$;	(r)	$\lim\limits_{x\to a}(2-\frac{x}{a})^{\tan\frac{\pi x}{2a}}$.

Çözüm: (a) Verilen limit $\frac{0}{0}$ şeklinde bir belirsizliktir. O halde, (4.61) formülüne göre

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^5-3x^2+7x-5}{x^4-5x+4} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x^5-3x^2+7x-5)'}{(x^4-5x+4)'}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{5x^4-6x+7}{4x^3-5}=-6\end{aligned}$$

olur.

(b) Verilen limit $\frac{0}{0}$ şeklinde bir belirsizliktir. O halde,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\frac{2}{\pi}arccosx)}{\ln(1+x)}$$

[(4.61) den]

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}arccosx}}{\frac{1}{1+x}}=-\frac{\pi}{2}$$

olur.

(c) Verilen limit $\frac{0}{0}$ şeklinde bir belirsizliktir. O halde, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-1}{\ln x}$ [(4.61) den] $= \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^x \ln x + x x^{x-1}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 1} x^{x+1}(\ln x + 1) = 1$ olur.

(d) Verilen limit $\frac{0}{0}$ şeklinde bir belirsizliktir. O halde, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x arcsin(x^2)}{x\cos x - \sin x}$ [(4.61) den] $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{arcsin(x^2) + \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^4}}}{-x\sin x}$ [$x \to 0$ iken $arcsin(x^2) \sim x^2$ ve $\sin x \sim x$ olduğundan]

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^4}}}{-x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{2}{\sqrt{1-x^4}}}{-1} = -3$$

olur.

(e) Verilen limit $\frac{0}{0}$ şeklinde bir belirsizliktir. O halde,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax - \sin bx}{\sinh ax - \sinh bx}[(4.61)den] = \lim_{x\to 0} \frac{a\cos ax - b\cos bx}{a\cosh ax - b\cosh bx} = \frac{a-b}{a-b} = 1$$

olur.

(f) Verilen limit $\frac{0}{0}$ şeklinde bir belirsizliktir. O halde,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^\alpha - 1}{x^\beta - 1}[(4.61)den] = \lim_{x\to 1} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta x^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

olur.

(g) Verilen limit $\frac{0}{0}$ şeklinde bir belirsizliktir. O halde,

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\ln(x - \frac{\pi}{2})}{\tan x}[(4.64)ten] = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos^2 x}{x - \frac{\pi}{2}}[(4.61)den] = \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x \sin x}{1} = 0$$

olur.

(h) Verilen limit $\frac{0}{0}$ şeklinde bir belirsizliktir. O halde, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-\cos x)}{\ln\tan x}$ [(4.64) ten] $= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x \cos x}{1-\cos x}$ [(4.61) den] $= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2\sin x\cos^2 x - \sin^3 x}{\sin x}$ $= \lim\limits_{x\to 0^+} (2cos^2 x - \sin^2 x) = 2$ olur.

(i) Verilen limit, $\frac{0}{0}$ şeklinde bir belirsizliktir.

$$\lim_{x\to 0} (\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{e^x - 1}) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x-1} - \tan x}{\tan x(e^x - 1)}$$

[$x \to 0$ iken $\tan x \sim x$ ve $e^{x-1} \sim x$ oldugundan]

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x-1} - \tan x}{x^2}[(4.61)den] = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{1}{\cos^2 x}}{2x}[(4.61)den] =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{2\sin x}{\cos^3 x}}{2} = \frac{1}{2}$$

olur.

(j) Verilen limit $\frac{0}{0}$ şeklinde bir belirsizliktir.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x\cos x}{\sin x} . \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \sin x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x\cos x}{\sin x} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \sin x} \\
&= \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{x}{\sin x}\cos x\right) \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \sin x} \\
&= 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \sin x} [(4.61)\text{den}] \\
&= 2\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{2x\sin x + x^2\cos x} = 2\lim_{x\to 0} \frac{1}{2 + \frac{x}{\sin x}\cos x} \\
&= \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

olur.

(k) $y = x^{x^x - 1}$ olsun. O halde $\ln y = (x^x - 1)\ln x$ olur. Bu da $0.\infty$ şeklinde bir belirsizliktir. O halde,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \ln y &= \lim_{x\to 0^+} (x^x - 1)\ln x \\
&= \lim_{x\to 0^+} (e^{x\ln x}) - 1)\ln x \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{(e^{x\ln x}) - 1}{x\ln x} x\ln^2 x \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{(e^{x\ln x}) - 1}{x\ln x} \lim_{x\to 0^+} x\ln^2 x
\end{aligned}$$

olur. $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ [(4.61) den] $\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0$ ve $t \to 0$ iken $e^{t-1} \sim t$ oldugundan $x \to 0^+$ iken $(e^{x\ln x}) - 1 \sim x\ln x$ dir. Buna göre $\lim_{x\to 0^+} \frac{(e^{x\ln x}) - 1}{x\ln x} = 1$ olur. Dolayısıyla

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} x\ln^2 x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}$$

[(4.61) den] $= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2\frac{\ln x}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -2\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$ bulunur. O halde, $x \to 0^+$ iken $y \to 1$, yani $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^x-1} = 1$ olur.

(l) Verilen limit 0^0 şeklinde bir belirsizliktir. $y = (\frac{\pi}{2} - arctanx)^{\frac{1}{x}}$ olsun. Bu durumda,

$$\ln y = \frac{\ln(\frac{\pi}{2} - arctanx)}{x}$$

olur. Bu da $\frac{\infty}{\infty}$ şeklinde bir belirsizliktir. O halde,

$$\lim_{x\to+\infty} \ln y = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\frac{\pi}{2} - arctanx)}{x}$$

[(4.64) ten]

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{(1+x^2)^2}}{-\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{(1+x^2)}}{\frac{\pi}{2} - arctanx}$$

[(4.61) den] $= -2\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$ $x \to +\infty$ iken $y \to 1$, yani $\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{\pi}{2} - arctanx)^{\frac{1}{x}} = 1$ olur.

(m) Verilen limit ∞^0 şeklinde bir belirsizliktir. $y = (\ln\cot x)^{\tan x}$ olsun. $\ln y = \tan x \ln(\ln\cot x) = \frac{\ln(\ln\cot x)}{\cot x}$ olur. Bu da $\frac{\infty}{\infty}$ şeklinde bir belirsizliktir. O halde, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln y = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(\ln\cot x)}{\cot x}$ [(4.64) ten] $=$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\ln\cot x}(-\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln\cot x} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{\ln t} = 0 \Rightarrow x \to 0^+$ iken $y \to 1$, yani $\lim\limits_{t\to 0^+} (\ln\cot x)^{\tan x} = 1$ olur.

(n) Verilen limit 1^∞ şeklinde bir belirsizliktir. $y = (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ olsun. $\ln y = \frac{1}{x^2}\ln\cos x$ olur. Bu da $\frac{0}{0}$ şeklinde bir belirsizliktir. O halde, $\lim\limits_{x\to 0} \ln y = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x^2}$ [(4.61) den] $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2x} = -\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x} = -\frac{1}{2}$ $x \to 0$ iken $y = e^{-\frac{1}{2}}$, yani $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$ olur.

(o) Verilen limit 1^∞ şeklinde bir belirsizliktir. $y = (\tan x)^{\tan 2x}$ olsun. $\ln y = \tan 2x \ln\tan x$ olur. Bu da $0.\infty$ şeklinde bir belirsizliktir.O halde, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \ln y = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln\tan x}{\cot 2x}$ [(4.61) den] $= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\tan x}\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{2}{\sin^2 2x}} = -\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 2x}{\sin x\cos x} =$ $-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} 4\sin x\cos x = -1$ $x \to \frac{\pi}{4}$ iken $y \to e^{-1}$, yani $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x} =$

e^{-1} olur.

(p) Verilen limit ∞^0 şeklinde bir belirsizliktir. $y = \mid \ln x \mid^{2x}$ olsun. $\ln y = 2x \ln \mid \ln x \mid$ olur. Bu da $0.\infty$ şeklinde bir belirsizliktir. O halde, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln y = \lim\limits_{x\to 0^+} 2x \ln \mid \ln x \mid = 2 \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln|\ln x||}{\frac{1}{x}} =$ [(4.64) ten] $= 2 \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{|x||\ln x|}}{-\frac{1}{x^2}} = 2 \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{|\ln x|} = 2 \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln x} = 0$ olur. Demek ki, $x \to 0^+$ iken $y \to 1$, yani $\lim\limits_{x\to 0^+} \mid \ln x \mid^{2x} = 1$ olur.

(q) Verilen limit 1^∞ şeklinde bir belirsizliktir. $y = (\frac{1}{x})^{\frac{1}{\sin \pi x}}$ olsun. $\ln y = \frac{1}{\sin \pi x} \ln \frac{1}{x}$ olur. Bu da $\frac{0}{0}$ şeklinde bir belirsizliktir. O halde, $\lim\limits_{x\to 1} \ln y = -\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{\sin \pi x}$ [(4.61) den] $= -\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{\pi x \cos \pi x} = \frac{1}{\pi}$ yani $x \to 1$ iken $y \to e^{\frac{1}{\pi}}$ $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{x}^{\frac{1}{\sin \pi x}} = e^{\frac{1}{\pi}}$ olur.

(r) Verilen limit 1^∞ şeklinde bir belirsizliktir. $y = (2 - \frac{x}{a})^{\tan \frac{\pi x}{2a}}$ olsun. $\ln y = \tan \frac{\pi x}{2a} \ln(2 - \frac{x}{a}) = \frac{\ln(2-\frac{x}{a})}{\cot \frac{\pi x}{2a}}$ olur. Bu da $\frac{0}{0}$ şeklinde bir belirsizliktir. O halde, $\lim\limits_{x\to a} \ln y = \lim\limits_{x\to a} \frac{(2-\frac{x}{a})}{\cot \frac{\pi x}{2a}}$ [(4.61) den] $= \lim\limits_{x\to a} \frac{2\sin^2(\frac{\pi}{2a})}{\pi(2-\frac{x}{a}} = \frac{2}{\pi}$, $x \to a$ iken $y \to e^{\frac{2}{\pi}}$, yani $\lim\limits_{x\to a}(2 - \frac{x}{a})^{\tan \frac{\pi x}{2a}} = e^{\frac{2}{\pi}} =$ olur. ⋄

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}, & x \neq 0 \text{ ise,} \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun $x = 0$ da türevi var mıdır?

Çözüm: Verilen fonksiyonun $x = 0$ noktasında türevlenebilir olması için $F(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{2}}{x} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $x \to 0$ iken sonlu limiti olmalıdır. $\lim\limits_{x\to 0} F(x)$ limitini L'Hospital kuralından faydalanarak bulalım. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{2}) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2e^x-2-x-xe^x}{2x(e^x-1)}$ [(4.61) den] $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1-xe^x}{2(e^x(1+x)-1)}$ [(4.61) den] $= \frac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-xe^x}{2e^x+xe^x} = 0$ olduğuna göre, $x \to 0$ iken $F(x)$ fonksiyonunun limiti $\frac{0}{0}$ şeklinde belirsizliktir. O halde, $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2e^x-2-x-xe^x}{2x^{2(e^x-1)}}$ [(4.61) den] $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{2e^{x-1}-e^x-xe^x}{4x(e^x-1)+2x^2e^x}$ [(4.61) den] $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{-xe^x}{4(e^x-1)+e^x(8x+2x^2)} =$ [(4.61) den] $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-e^x(x+1)}{(12+12x+2x^2)e^x} = -\frac{1}{12}$,yani $f'(0) = -\frac{1}{12}$ olur. ⋄

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-\sin x}{x+\cos x}$ limitinin hesaplanmasında L'Hospital kuralının uygulanamadığını gösteriniz. Bu limiti başka yolla hesaplayız.

Çözüm: $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\mid \sin x \mid\leq 1$ ve $\mid \cos x \mid\leq 1$ olduğuna göre, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ için

$$\mid \frac{\sin x}{x} \mid\leq \frac{1}{\mid x \mid}, \quad \mid \frac{\cos x}{x} \mid\leq \frac{1}{\mid x \mid}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

olur. O halde, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-\sin x}{x+\cos x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}} = 1$ bulunur. Verilen limit $\frac{\infty}{\infty}$ şeklinde belirsizliktir. Ancak burada 2. L'Hospital kuralından yararlanamayız. Çünkü, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-\sin x}{x+\cos x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-\cos x}{1-\sin x}$ limiti yoktur. Gerçekten, $F(x) = \frac{1-\cos x}{1-\sin x}(x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in N)$ olmak üzere $x_n' = 2n\pi, n \in \mathbb{N}$ için $n \to \infty$ iken $F(x_n') = 0 \to 0$, $x_n'' = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{N}$ için $n \to \infty$ iken $F(x_n'') = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$ ◇

(4) $[a, b]$ üzerinde tanımlanmış $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için

(a) f ile g fonksiyonları (a, b) üzerinde $(n+1)$. mertebeden türevlenebilirdir,

(b) $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$,

(c) $g(a) = g'(a) = \cdots = g^{(n)}(a) = 0$,

(d) $\forall x \in (a, b)$ için $g^{(k)}(x) \neq 0,\ k = 0, 1, 2, ..., n$, koşulları sağlanıyorsa,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n+1)}(x)}{g^{(n+1)}(x)}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $[a, x]$ $(a < x \leq b)$ aralığında f ve g fonksiyonları için Teorem 4.4.16 nın koşulları sağlandığından

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_1)}$$

olacak şekilde bir $c_1 \in (a, x)$ noktası vardır. $[a, c_1]$ aralığında f ve g fonksiyonları için Teorem 4.4.16 ' nın koşulları sağlandığından

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_1)} = \frac{f'(c_1) - f'(a)}{g'(c_1) - g'(a)} = \frac{f''(c_2)}{g''(c_2)}$$

olacak şekilde bir $c_2 \in (a, c_1)$ noktası vardır. Benzer şekilde devam ederek $(n+1)$. adımda

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(c_n)}{g^{(n)}(c_n)} = \frac{f^{(n)}(c_n) - f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(c_n) - f^{(n)}(a)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{g^{(n+1)}(c)}$$

olacak şekilde bir $c \in (a, c_n) \subset (a, x)$ noktasının mevcut olduğunu elde ederiz. Bu eşitlikte $x \to a$ iken limite geçersek $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ $[x \to a \Longrightarrow c \to a$ dan dolayı$] = \lim\limits_{c\to a} \frac{f^{(n+1)}(c)}{g^{(n+1)}(c)}$,dolayısıyla, istenen eşitliğin doğruluğu elde edilir. $\diamond$

4.6.4 Ek Problemler

(5) L'Hospital kuralından faydalanarak aşağıdaki limitleri bulunuz.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^2+4x-7}{2x^2+3x-5}$; (b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-3x^2+7x-5}{x^3+2x^2-9x+6}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{20}-2x+1}{x^{30}-2x+1}$; (d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x}$;

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2arctanx-x}{2x-arcsinx}$; (f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{1-\cos x}$;

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\frac{x^2}{2}-\sin x}{arctan^3 x}$; (h) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{5x^3-x}-2x}{\sqrt[5]{x^2}-1}$;

(i) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{arctan(x-1)}{\sqrt{x^2+x-2}}$; (j) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\ln(x-\frac{\pi}{2})}{\tan x}$;

(k) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x^2-1)}$; (l) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x+3x^3}{4e^x+2x^2}$;

(m) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1-\cos x})$; (n) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\frac{x}{\cot x} - \frac{\pi}{2\cos x})$;

(o) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1})$; (p) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(\ln\frac{1}{x})$;

(q) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln(\frac{2}{\pi}arctanx)$; (r) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\cot\frac{\pi x}{1+x})^{\frac{1}{x}}$;

(s) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$; (t) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{2}{\pi}arccosx)^{\frac{1}{x}}$;

(u) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}(\tan x)^{\sin 2x}$; (v) $\lim\limits_{x\to 0}(arcsinx)^{\tan x}$;

(w) $\lim\limits_{x\to 0^+}(2\sqrt{x}+x)^{\frac{1}{\ln x}}$; (x) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}}$;

(y) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{e^{x-1}-x}}$; (z) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{\ln(1+x)}{3((1+x)^{\frac{1}{3}}-1})^{\frac{x}{\sin^2 x}}$;

(xx) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\tan(\sin x)}{\sin(\tan x)})^{\frac{1}{x^2}}$; (yy) $\lim\limits_{x\to 0^+} tan^x(1-x^x)$;

(zz) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin^{100} x}{x^{99}\sin x})^{\frac{2}{3x^2}}$;

Cevap:

(a)	$\frac{10}{7}$;	(b)	-2;	(c)	$\frac{9}{14}$;	(d)	$\frac{1}{9}$;	(e)	1;	(f)	2;
(g)	$\frac{1}{2}$;	(h)	$\frac{15}{4}$;	(i)	0;	(j)	0;	(k)	1;	(l)	$\frac{1}{4}$;
(m)	$\frac{1}{2}$;	(n)	-1;	(o)	$-\frac{1}{2}$;	(p)	0;	(q)	$-\frac{2}{\pi}$;	(r)	1;
(s)	1;	(t)	$e^{-\frac{2}{\pi}}$;	(u)	1;	(v)	1;	(w)	$\sqrt{e}$;	(x)	e^2;
(y)	$e^{-\frac{1}{6}}$;	(z)	1;	(xx)	1;	(yy)	1;	(zz)	e^{-11} .		

(6) Aşağıdaki limitlerin hesaplanmasında L'Hospital kuralının yararlı olmadığını gösteriniz. Bu limitleri başka yollardan hesaplayınız.
(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2-\sin x}$; (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-ax}}{e}^{-x}(2-\sin x-\cos x)$; .
Cevap: (a)1; (b)0; $a>1$ ise,$+\infty$; $a<1$ ise, limit yoktur,$a=1$ ise .

(7) $n\in N$ olmak üzere $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}$; limitini bulunuz.
Cevap: 0

(8) Proplem 6. dan ve türev tanımından faydalanarak $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \text{ ise,}\\ 0, & x=0 \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonunun $x=0$ noktasında türevini bulunuz.
Cevap: $f'(0)=0$.

4.7 Fonksiyonların Diferensiyel Hesabı Yöntemleri ile Araştırılması

4.7.1 Fonksiyonların Monotonluk Koşulları

Önerme 4.7.1 : *$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) üzerinde türevlenebilir olsun. Bu durumda, (a,b) üzerinde*